10 *Exemplos de prova e dedução*■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Relembrando... Axiomas de $\mathcal{L}$

Axiomas. Temos três esquemas de axiomas. Se A, B e C são fbf's, então são axiomas:

(L1) $\left(A \rightarrow (B \rightarrow A)\right)$

(L2) $\left(\left(A \rightarrow (B \rightarrow C)\right) \rightarrow \left((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\right)\right)$

(L3) $\left(\left((\neg A) \rightarrow (\neg B)\right) \rightarrow (B \rightarrow A)\right)$

Regra de inferência: Modus Ponens.

Exemplo de uma prova em $\mathcal{L}$

$$\vdash_{\mathcal{L}} ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$$

(L1) $(A \to (B \to A))$

(L2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

Exemplo de uma prova em $\mathcal{L}$

$$\vdash_{\mathcal{L}} ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$$

1	$(p_1 \to (p_2 \to p_1))$	Axioma L1

(L1) $(A \to (B \to A))$

(L2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

Exemplo de uma prova em $\mathcal{L}$

$$\vdash_{\mathcal{L}} ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$$

1	$(p_1 \to (p_2 \to p_1))$	Axioma L1
2	$((p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)))$	Axioma L2

Exemplo de uma prova em $\mathcal{L}$

$$\vdash_{\mathcal{L}} ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$$

1	$(p_1 \to (p_2 \to p_1))$	Axioma L1
2	$((p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)))$	Axioma L2
3	$((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$	Conclusão de 1 e 2 por MP

Exemplo de uma dedução em $\mathcal{L}$

$$\Gamma = \{A, (B \to (A \to C))\} \vdash_{\mathcal{L}} (B \to C)$$

1	A	Elemento de Γ
2	$(B \to (A \to C))$	Elemento de Γ
3	$(A \to (B \to A))$	Axioma L1
4	$((B \to (A \to C)) \to ((B \to A) \to (B \to C)))$	Axioma L2
5	$(B \to A)$	1, 3 por MP
6	$((B \to A) \to (B \to C))$	2, 4 por MP
7	$(B \to C)$	5, 6 por MP

Observações finais

Note que usamos dois níveis de linguagens:

- A prova exibiu uma fórmula que é teorema do sistema
- Na dedução, provamos um fato geral sobre as fórmulas do sistema: que para quaisquer fórmulas A, B e C, $\{A, (B \rightarrow (A \rightarrow C))\} \vdash_{\mathcal{L}} (B \rightarrow C)$.

No segundo resultado, podemos dizer que provamos um *metateorema* do sistema, utilizando a linguagem comum matemática (metalinguagem).

Lógica Matemática

10 *Exemplos de prova e dedução* ■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br